SOMMAIRE

Introduction générale

L'inférence statistique consiste à induire les caractéristiques inconnues d'une population à partir d'un échantillon issu de cette population. Les caractéristiques de l'échantillon, une fois connues, reflètent avec une certaine marge d'erreur possible celles de la population. Les statistiques inférentielles reposent sur divers méthodes d’échantillonnage qui permettent de fournir soit une estimation ponctuelle de paramètres inconnue de la population soit une estimation par un intervalle de confiance. Elles permettent en outre à formuler des tests d’hypothèse utilisés dans différentes optiques. En effet ces tests permettent de juger la conformité de paramètres inconnus de la population avec certaines valeurs prédéterminées (tests paramétriques). Ces tests sont aussi utilisés pour vérifier si les valeurs observées d’une population suit ou pas une loi statistique théorique susceptible d’encadrer ses probabilités de réalisation (tests d’ajustements). Ces tests permettent en outre de se prononcer sur la présence ou pas de lien entre deux variables aléatoires (test d’indépendance).

Les résultats issus des statistiques inférentielles permettent de guider la décision dans divers domaines de gestion notamment au niveau de la gestion de la production (contrôle de qualité, choix des fournisseurs …) du marketing (estimation de la proportion d’acheteurs d’un produit, estimation d’impact d’actions commerciales, similitude entre plusieurs catégories de clients..) et de la gestion financière (gestion des crédits, gestion de portefeuille titres…)

Chapitre 1 :

Notions de variables aléatoires et lois de probabilité

I-Rappel sur des notions de probabilités :

On appelle épreuve aléatoire, une épreuve dont le résultat dépend du hasard. Le résultat est donc incertain. On note Ω l'ensemble des résultats possible d'une épreuve aléatoire et Ƥ (Ω) l'ensemble des parties possibles de Ω. On appelle probabilité P sur (Ω, Ƥ (Ω)) toute application de Ƥ (Ω) dans [0 ,1] telle que P(Ω) = 1, et toute famille (A_n) n∊ ℕ d'éléments deux à deux disjoints de Ƥ (Ω), on a $P (U_n A_n) = \sum_n P (A_n)$.

(Ω, Ƥ (Ω) , P) forme alors un espace probabilisée. Pour tout éléments A et B

$$\forall A, B \in P(\Omega), P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$$

$$\forall A, B \in P(\Omega), P(A / B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$$

Si A et B sont indépendants alors

$$P(A \bigcap B) = P(A) x P(B)$$

Si tous les éléments de Ω sont équiprobables alors P(A) = CARD (A) / CARD (Ω)

II- Notion de variable aléatoire :

On appelle variable aléatoire (V.A) le résultat caractéristique d'une épreuve aléatoire. De façon conventionnelle, on notera toujours par une majuscule (exemple X) la variable aléatoire et par des minuscules (exemple x_i) les valeurs qu'elle peut prendre.

Exemple 1 :

X la V.A : « Résultat d'un jet de dé »

$\left\{x_i\right\} = \left\{1,2,3,4,5, 6\right\}$

Exemple 2 :

X la V.A : « Taille d'une personne tirée dans un échantillon »

x_i : { [1m ; 1,5m[; [1,5m, 2m[; [2m, 3m[}

Dans le premier cas, la variable aléatoire est dite discrète car elle prend uniquement des valeurs isolées. Dans le second cas la variable aléatoire est dite continue du fait qu'elle prend n'importe quelle valeur réelle à l'intérieur d'un intervalle.

III- Loi de probabilité :

1- Cas d'une VA discrète :

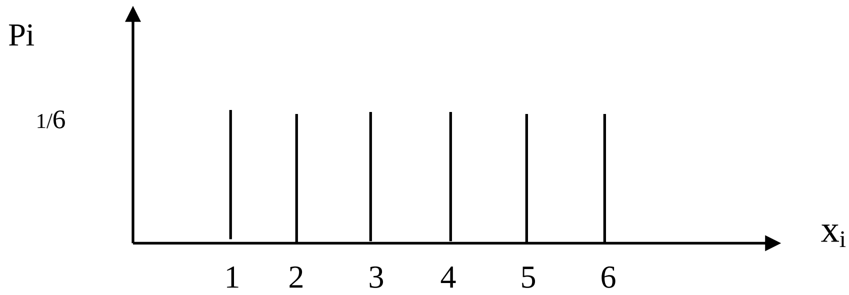
On appelle loi de probabilité d'une VA discrète la relation qui permet de déterminer la probabilité que cette variable prenne une valeur donnée.

Exemple : Soit X la VA : « Résultat d'un jet de dé »

La loi de probabilité de X peut être représentée par le tableau suivant sous réserve que le dé ne soit pas truqué :

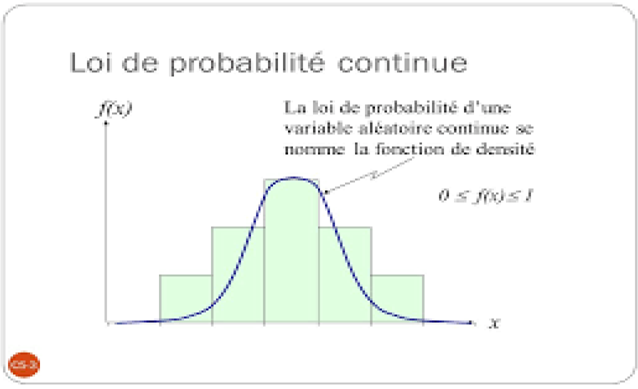
X_i	1	2	3	4	5	6
$P(X= X_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

On peut associer à cette loi de probabilité le diagramme en bâtons suivant :



2- Cas d'une VA continue :

On appelle loi de probabilité d'une VA continue la fonction qui permet de déterminer la probabilité que cette variable appartienne à un intervalle.
Cette loi de probabilité s'exprime par une fonction dite fonction de densité de probabilité et notée par f(x). Cette fonction peut être représentée graphiquement par une courbe :



VI- Fonction de répartition :

La fonction de répartition ou fonction cumulative F (x) d'une variable aléatoire X est la fonction qui associe à toute valeur x de X, la probabilité que X soit inférieure ou égale à x :
$F(x) = P(X \leq x)$

Propriétés:

* $0 \leq F(x) \leq 1$ (car F(x) est une probabilité)
* $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Remarque:

Graphiquement la fonction de répartition d'une VA discrète sera un diagramme en escaliers alors qu'il s'agit d'une courbe continue et croissante dans le cas d'une VA continue.

V- Fonction de distribution ou de densité de probabilité :

Si la fonction de répartition d'une VA continue X est dérivable, la fonction de distribution ou de densité de probabilité sera alors la fonction dérivée de F.
$f(x) = F'(x)$ On peut alors écrire

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \langle X \leq x_2)$$

Conséquence : Dans le cas d'une VA continue, la probabilité que cette variable prenne une valeur particulière est nulle.
Démonstration :

$$P(X=y)=P(y\langle X\leq y)=F(y)-F(y)=0$$

VI- Notion d'espérance et de variance :

1- Cas d'une VA discrète :

Dans le cas d'une VA discrète l'espérance et la variance sont données par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{N} p_i x_i$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{N} p_i (x_i - E(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{i=N} p_i x_i^2 - E(X)^2$$

2- Cas d'une VA continue :

Dans le cas d'une VA continue l'espérance est la variance sont données par :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx$$

3- Signification de l'espérance mathématique :

C'est le résultat moyen que l'on doit s'attendre à obtenir sur un grand nombre d'épreuves.
Exemple : dans un jeu de pile ou face un individu A donne 4 dinars à B chaque fois que le côté pile apparaît et reçoit 2 dinars dans le cas ou c'est le côté face qui apparaît.
Soit X la VA : « Gain de l'individu A »

x_i	- 4	2
$P(X=x_i)$	0.5	0.5

E(X)= 0.5 (-4) + 0.5(2) = -1
Donc on peut conclure que l'individu A doit s'attendre à perdre en moyenne 1 dinar en jouant à ce jeu, var l'espérance mathématique de son gain est négative –1.

VII- Opérations sur les VA :

Soient deux variables aléatoires X et Y, on aura alors :

E(X+Y) = E(X)+E(Y)

E(X-Y) = E(X)-E(Y)

E(aX) = a E(X) ; E(X+b) = E(X)+b ; E(aX+b) = a E(X) + b

V(aX) = a^2V(X) ; V(X+b) = V(X) ; V(aX+b) =a^2V(X) ;

V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2 V(Y) + 2ab COV(X,Y)

Si X et Y sont indépendants on aura alors:

V(X+Y) = V(X) + V(Y)

V(X-Y)= V(X) + V(Y)